250 - Transformation de Fourier. Applications.

Cadre : Soit $d \in \mathbb{N}^\star$. On considère $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$.

I Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

1) Définition et premières propriétés

Définition 1. On définit la transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ par :

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \longmapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx \end{array} \right.$$

Remarque 2. *Cette définition a un sens car* $\left| f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle} \right| = |f(x)|$.

Proposition 3. *Pour* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ *est une fonction continue.*

Théorème 4 (Riemann-Lebesgue)**.** *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{\|\xi\| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Proposition 5. *Pour* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *on a* $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *avec* $\left\| \widehat{f} \right\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

Proposition 6. *L'application* $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ *est bien définie, linéaire et continue.*

Exemple 7. *Si* $f = \mathbb{1}_{[-b,b]}$, *on a* $\widehat{f} : \xi \mapsto \frac{\sin(b\xi)}{\xi}$ *(prolongée par b en 0).*

Exemple 8. *Si* $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$ *pour* $a > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$, *alors* $\widehat{\gamma_a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \gamma_{\frac{1}{4a}}$.

Proposition 9. *Soient* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}^d$ *et* $\lambda > 0$.

(i) Si $g(x) = f(x)e^{i\langle \alpha, x\rangle}$, *alors* $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \alpha)$.

(ii) Si $g(x) = f(x - \alpha)$, *alors* $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{-i\langle \alpha, \xi\rangle}$.

(iii) Si $g = \overline{\check{f}}$, *alors* $\widehat{g} = \overline{\widehat{f}}$.

(iv) Si $g(x) = f(\lambda x)$, *alors* $\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda^d} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$.

Proposition 10. *Soient* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *et* $j \in [\![1, d]\!]$.

(i) Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ *et* $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *alors* $\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi)$ *pour* $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(ii) Si $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *alors* $\partial_j \widehat{f}$ *existe et* $\partial_j \widehat{f} = -i\widehat{x_j f}$.

2) Produit de convolution

Définition 11. Soient $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Quand ceci a un sens, on pose :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x - t)\, dt$$

le produit de convolution de f et g en $x \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 12. *La convolution entre fonctions mesurables positives est commutative et associative.*

Exemple 13. *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *positive, alors* $f * 0 = 0$ *et* $f * \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d} = \int_{\mathbb{R}^d} f$.

Proposition 14. *Soit* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ *à support compact. Alors* $f * g$ *est bien définie sur* $\mathbb{R}^d$.

Théorème 15. $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, *)$ *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre commutative.*

Proposition 16. *Soient* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. *Alors* $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.

Application 17. *L'algèbre* $(L^1(\mathbb{R}^d), +, \cdot, *)$ *est sans unité.*

Application 18. *Si* $f = f * f$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^d)$, *alors* $f = 0$.

3) Inversion de Fourier

Théorème 19. *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *telle que* $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Alors :*

$$\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^d \check{f} \qquad \text{i.e.} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,\ f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\xi$$

Corollaire 20. *La transformée de Fourier est injective.*

Corollaire 21. *Si* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *n'est pas continue,* $\widehat{f}$ *n'est pas intégrable.*

Définition 22. Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et strictement positive, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty$. On dit alors que ρ est une fonction poids.

Théorème 23. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* ρ *une fonction poids. S'il existe* $a > 0$ *tel que* $\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < \infty$, *alors les polynômes orthogonaux associés à* ρ *forment une base hilbertienne de* $L^2(I, \rho)$.

II Extension de la transformée de Fourier

1) Prolongement à $L^2(\mathbb{R}^d)$

Remarque 24. *Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on ne peut pas définir $\widehat{f}$ comme dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ puisque $x \mapsto f(x)e^{-i\langle\xi,x\rangle}$ n'est en général pas intégrable.*

Exemple 25. *Si $f : x \mapsto \frac{1}{x}\mathbb{1}_{[1,100[}(x) \in L^2(\mathbb{R})$, $x \mapsto f(x)e^{-i\xi x} \notin L^1(\mathbb{R})$.*

Lemme 26. *Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et $\|\widehat{\varphi}\|_2 = \|\varphi\|_2$.*

Définition 27. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on écrit f comme limite de $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Posons $\mathcal{F}(f) = \lim_{n\to\infty}\mathcal{F}(\varphi_n)$. Cette limite existe et est indépendante de la suite choisie, et définit un élément de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 28. *L'application $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ est linéaire et continue telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ on a $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$. Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a $\langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(g)\rangle = \langle f, g\rangle$, et $\int_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(f))g = \int_{\mathbb{R}} f(\mathcal{F}(g))$.*

Théorème 29. *Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, on a deux définitions de la transformée de Fourier. Ces deux définitions sont équivalentes.*

Théorème 30 (Plancherel)**.** *La transformation de Fourier su $L^2(\mathbb{R}^d)$ est un isomorphisme. En notant J l'opérateur défini sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par $Jf(x) = f(-x)$, l'inverse de $\mathcal{F}$ et donné par $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ J = J \circ \mathcal{F}$, ce que l'on peut traduire sous la forme $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = J$. L'opérateur $\mathcal{F}$ est unitaire : $\mathcal{F}^\star = \mathcal{F}^{-1}$.*

2) Espace de Schwartz

Définition 31. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on pose $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_d^{\alpha_d}$, et pour f de classe $\mathcal{C}^{|\alpha|}$, on pose $\partial^\alpha f = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d} f$. Pour f de classe $\mathcal{C}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leqslant n$, on pose $N_{\alpha,\beta}(f) = \left\|x^\beta\partial^\alpha f\right\|_\infty$.

Définition 32. On appelle espace de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$ l'ensemble :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \,\middle|\, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, N_{\alpha,\beta}(f) < \infty \right\}$$

Proposition 33. *Pour tout $p \geqslant 1$, on a $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$.*

Proposition 34. *L'espace de Schwartz est stable par produit avec les polynômes, dérivation et produit.*

Proposition 35. *Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a, pour $\xi \in \mathbb{R}^d$:*

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\mathcal{F}(f)(\xi) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}\left(x^\beta f\right)(\xi) = i^{|\beta|}\partial^\beta\mathcal{F}(f)(\xi)$$

Théorème 36. *La transformée de Fourier est un homéomorphisme linéaire de l'espace de Schwartz dans lui-même.*

3) Distributions tempérées

Définition 37. On définit l'espace vectoriel $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions dans $\mathbb{R}^d$ comme le dual topologique de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées dans $\mathbb{R}^d$ comme le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et l'espace vectoriel $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions à support compact dans $\mathbb{R}^d$ comme le dual topologique de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

Proposition 38. *Comme on a une injection continue $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a une injection continue $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 39. Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit $\widehat{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ par $\left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\rangle$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. L'application $\widehat{T}$ est une distribution tempérée, appelée transformée de Fourier de T.

Théorème 40. *La transformée de Fourier des distributions tempérées donne un homéomorphisme linéaire de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.*

Proposition 41. *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On a :*

- *(i)* $\mathcal{F}(\mathcal{F}(T)) = (2\pi)^d\check{T}$, *où* $\left\langle \check{T}, \varphi \right\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle$.
- *(ii)* $\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\mathcal{F}(T)$, *où* $\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle$.
- *(iii)* $\mathcal{F}(x^\alpha T) = i^{|\alpha|}\partial^\alpha\mathcal{F}(T)$.

Exemple 42. *On a $\widehat{\delta_0} = 1$, $\widehat{\sin} = \delta_1 - \delta_{-1}$, $(x \mapsto \frac{\sin(bx)}{x}) \xrightarrow[b\to+\infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} \delta_0$.*

Définition 43. Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. On définit la convolution de T et S par $\langle T * S, \varphi\rangle = \left\langle T, \check{S} * \varphi \right\rangle$, où $\check{S}*\varphi : x \mapsto \langle S(y), \varphi(y-x)\rangle$.

Proposition 44. *Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors :*

$$T * \delta_0 = \delta_0 * T = T \quad \text{et} \quad \partial^\alpha(T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$$

Théorème 45. *Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$. Alors $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, et $\mathcal{F}(T * S) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(S)$.*

III Applications

1) Formule sommatoire de Poisson

Théorème 46. *Soit* $F : L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. *On note, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{F}(n) = \int_{\mathbb{R}} F(t)e^{-int}\,dt$. *On suppose :*

$$\exists M > 0,\, \exists \alpha > 1,\, \forall x \in \mathbb{R},\, |F(x)| \leqslant M(1+|x|)^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{F}(n)| < +\infty$$

Alors on a la relation :

$$2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n)$$

Application 47. *Pour tout* $s > 0$, *on a :*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi k^2}{s}}$$

2) Équations aux dérivées partielles

Pour $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, on considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{R} \\ u(0,.) = u_0 & \text{dans } \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{$*$}$$

Théorème 48. *Il existe une unique solution* u *au problème de Cauchy* ($*$) *donnée pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $t > 0$ *par :*

$$u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,dy$$

3) Application en probabilités

Définition 49. Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ définie sur $\mathbb{R}$. La fonction f est la densité d'une loi de probabilité, appelée loi normale centrée réduite et notée $\mathcal{N}(0,1)$. Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on notera $\mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$ la loi de $Y = \sigma X + m$, pour $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Proposition 50. *Soient* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ *et* $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right)$. *Alors* $\mathbb{E}[X] = 0$, $\mathbb{E}[Y] = m$, $\operatorname{Var}(X) = 1$ *et* $\operatorname{Var}(Y) = \sigma^2$.

Définition 51. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $E = \mathbb{R}^d$. On définit la fonction caractéristique φ_X de X par :

$$\varphi_X : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & \mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, X\rangle}\right] \end{array} \right.$$

Exemple 52. *Si* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, *alors* $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Remarque 53. *Si* X *a pour densité* f, *alors* $\varphi_X = \check{\widehat{f}}$.

Proposition 54. φ_X *caractérise* $\mathbb{P}_X$.

Proposition 55. *Si* X *est réelle et* $\mathbb{E}\left[|X|^p\right] < +\infty$, *alors* φ_X *est* p *fois dérivable et* $\varphi_X^{(p)}(\lambda) = i^p \mathbb{E}\left[X^p e^{i\lambda X}\right]$. *En particulier,* $\varphi_X^{(p)}(0) = i^p \mathbb{E}\left[X^p\right]$.

Théorème 56 (Lévy)**.** $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ *si et seulement si* $\varphi_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X$.

Théorème 57 (Théorème central limite)**.** *On suppose que les* X_n *sont indépendants, identiquement distribués et de carré intégrable. Alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_i)}} \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \quad \mathcal{N}(0,1)$$

Développements

- Formule sommatoire de Poisson (46,47) [Gou08]
- Transformée de Fourier d'une gaussienne (8) [El 08]
- Densité des polynômes orthogonaux (23) [BMP05]

Références

[ZQ13] C. Zuily et H. Queffélec. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod
[El 08] M. El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses
[Rud09] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe.* Dunod
[BP12] M. Briane et G. Pagès. *Théorie de l'intégration.* Vuilbert
[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses
[BMP05] V. Beck, J. Malick, et G. Peyré. *Objectif Agrégation.* H&K